http://www.courscapitole.com/doku.php/concours/parallele/hec

Préparation de l'épreuve de mathématiques au CAD HEC-ESCP

Par Cours Capitole

L'épreuve de mathématiques au CAD d'HEC ESCP vise à vérifier les connaissances du candidat dans cette matière. Elle permet de sélectionner les meilleurs candidats.
Une préparation minutieuse et rigoureuse est alors nécessaire, pour approfondir ses compétences, mais aussi savoir les structurer dans l'esprit du concours.
Grâce à leur expérience du concours CAD HEC-ESCP, les professeurs de Cours Capitole vous proposent cet ouvrage, indispensable outil à la préparation de l'épreuve de mathématiques au concours des admissions parallèles à HEC et à l'ESCP.

Claire Michel
01/11/2013

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

une activité gérée par la Chambre de commerce et d'industrie de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DIRECTE EN PREMIERE ANNEE DU CYCLE MASTER H.E.C. - ESCP/EUROPE - E.S.C.

CONCOURS D'ADMISSION DE 2012

OPTION : MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Mardi 17 avril 2012, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités ***à encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Chaque candidat est invité à traiter l'un des deux sujets suivants :

- **soit le sujet d'Analyse et Algèbre**
- **soit le sujet d'Algorithmique et Probabilité**

Dans le cas où un candidat traiterait les deux sujets, seul le premier sujet figurant sur la copie serait noté.

Tournez la page S.V.P.

SUJET D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE

EXERCICE I

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

Soit A et B les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.a) Quelles sont les valeurs propres des matrices A et B respectivement ?

b) La matrice B est-elle diagonalisable ?

2.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n et B^n en fonction de n.

b) Montrer que les matrices A et B sont inversibles.

c) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer A^n et B^n en fonction de n.

d) En déduire pour tout $(n, p, q) \in \mathbb{Z}^3$, la matrice $A^p B^n A^q$ en fonction de n, p et q.

3. On rappelle qu'un groupe Γ est de type fini s'il existe une partie finie P de Γ telle que le sous-groupe engendré par P soit égal à Γ.

Montrer que le groupe additif $\mathbb{Z}^2$ est de type fini.

Dans la suite, on note :

- Δ le groupe des nombres rationnels admettant un représentant de la forme $n2^p$, pour tout $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$ muni de l'addition ;
- H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où d décrit Δ ;
- G l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} 2^k & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où k décrit $\mathbb{Z}$ et d décrit Δ.

4.a) Montrer que le groupe Δ n'est pas de type fini.

b) Montrer que H, muni de la multiplication des matrices, a une structure de groupe.

c) À l'aide de la question 3, en déduire que le groupe H n'est pas de type fini.

5.a) Montrer que G, muni de la multiplication des matrices, a une structure de groupe.

b) Le groupe G est-il commutatif ?

c) Montrer que G est engendré par la partie $\{A, B\}$.

6. Un sous-groupe d'un groupe de type fini est-il nécessairement de type fini ?

EXERCICE II

On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$; en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

2.a) Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$; préciser son rayon de convergence.

b) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$ et calculer sa valeur.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, où $\displaystyle\frac{1}{a_n} = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Dans la suite de l'exercice, on note f la fonction définie sur l'intervalle $]-4,4[$ par : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

4.a) Justifier que la fonction f est dérivable à droite en 0. On note f' la dérivée de f sur $]0,4[$.

b) Pour tout $x \in]0,4[$, calculer $(4x - x^2)f'(x) - (x+2)f(x)$.

5.a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x^{\frac{1}{n}})x^{\frac{1-n}{n}} \ln(1+x)\,dx$ est convergente.

b) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\ln(1+x^n)\,dx$. Déduire de la question précédente un équivalent simple de I_n, en fonction de $f(1)$, lorsque n tend vers $+\infty$.

6.a) Déterminer toutes les fonctions g définies et dérivables sur $]0,4[$, à valeurs réelles, qui vérifient :

$$(4x - x^2)g'(x) - (x+2)g(x) = 0$$

b) En déduire toutes les fonctions h définies et dérivables sur $]0,4[$, à valeurs réelles, qui vérifient :

$$(4x - x^2)h'(x) - (x+2)h(x) = -2$$

c) Donner pour tout $x \in]0,4[$, une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

d) En déduire la valeur de $f(1)$.

Tournez la page S.V.P.

SUJET DE PROBABILITÉS ET D'ALGORITHMIQUE

EXERCICE I

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles à densité, indépendantes et de même loi, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et dont une densité f est de classe C^1 et à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.
On note F la fonction de répartition de X_1 définie par : pour tout t réel, $F(t) = P([X_1 \leqslant t])$.
Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X.
Pour tout événement D de $\mathcal{A}$, on note $\mathbf{1}_D$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbf{1}_D(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in D \\ 0 & \text{si } \omega \notin D \end{cases}$$

Pour n entier supérieur ou égal à 1 et t réel, on définit les variables aléatoires $F_n(t)$ et $f_n(t)$ par :

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{[X_k \leqslant t]} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \frac{\sqrt{n}}{2}\left(F_n\left(t + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - F_n\left(t - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

1. Soit t un réel fixé et n un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$.
   a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $nF_n(t)$. En déduire $E(F_n(t))$ et $V(F_n(t))$.
   b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big((F_n(t) - F(t))^2\big) = 0$.
   c) Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $\big(\sqrt{n}(F_n(t) - F(t))\big)_{n\geqslant 1}$.

2. Soit $(T_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable aléatoire T et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels qui converge vers le réel u.
   a) Montrer que la suite de variables aléatoires $(T_n + u_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $T + u$.
   b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(u_n T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers uT.

3. Soit $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels de $]0,1[$ qui converge vers le réel p de $]0,1[$, et $(S_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \geqslant 1$, S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$.
   Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{S_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

4.a) Pour n entier de $\mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, justifier que $2\sqrt{n} f_n(t)$ suit une loi binomiale ; préciser ses paramètres.
   b) En déduire que pour tout t réel, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} E(f_n(t)) = f(t)$.
   c) Montrer que pour tout t réel, on a : $V(f_n(t)) = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} f(t) + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

5. À l'aide des questions 2 et 3, montrer que la suite de variables aléatoires $\big(n^{\frac{1}{4}}(f_n(t) - f(t))\big)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée de variance $\dfrac{1}{2} f(t)$.

6. Soit a et b deux réels vérifiant $a < b$.

On admet que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est une variable aléatoire admettant une variance.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Soit t et s deux réels tels que $a \leqslant t < s \leqslant b$. Montrer que pour n assez grand, on a :

$$E\big(f_n(t)f_n(s)\big) = \frac{1}{4}(n-1)\left(F\left(t+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - F\left(t-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \times \left(F\left(s+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - F\left(s-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

c) En déduire que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E\left(\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\right) = \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$.

d) Montrer que la suite de variables aléatoires $\displaystyle\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE II

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I. Décomposition de Zeckendorf d'un entier naturel

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $F_0 = 0, F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

2.a) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n en fonction de n.

b) En déduire un équivalent simple de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On dit que n admet une *Z-décomposition* s'il existe un entier $s(n) \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on puisse écrire : $n = \sum_{j=1}^{s(n)} F_{k_j}$, où pour tout $j \in [\![1, s(n)]\!]$, k_j est un entier supérieur ou égal à 2 et où pour tout $j \in [\![1, s(n)-1]\!]$ (avec $s(n) \geqslant 2$), on a $k_{j+1} - k_j \geqslant 2$.

a) Donner la Z-décomposition des nombres 83 et 195.

b) Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\{0,1\}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_k\varepsilon_{k+1} = 0$.

Montrer que pour tout entier $m \geqslant 3$, on a : $\sum_{k=2}^{m-1} \varepsilon_k F_k < F_m$.

c) En déduire que tout entier n supérieur ou égal à 1 admet une unique Z-décomposition.

4. Écrire dans le langage de votre choix, un algorithme qui retourne la liste $\left(s(n), F_{k_1}, F_{k_2} \ldots, F_{k_{s(n)}}\right)$, pour un entier n donné.

Partie II. Complexité d'un algorithme de multiplication rapide de polynômes

On rappelle que la partie entière de tout réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier de $\mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_j[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à j.
Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On pose : $p = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

1. Écrire dans le langage de votre choix, un algorithme de multiplication de P et Q de complexité $\mathcal{O}(n^2)$.

2.a) Établir l'existence des polynômes P_1, Q_1, R_1 et R_2 de $\mathbb{R}_{n-p-1}[X]$ tels que :

$$P = P_1X^p + R_1 \quad \text{et} \quad Q = Q_1X^p + R_2$$

b) Vérifier que l'on a : $PQ = P_1Q_1X^{2p} + \big((R_1 + P_1)(R_2 + Q_1) - P_1Q_1 - R_1R_2\big)X^p + R_1R_2$.

On considère l'algorithme suivant de multiplication de P et Q dit algorithme **Karatsuba**, noté **K** :

Entrée : P et Q.
Sortie : PQ.
Si $n = 1$: Retourner PQ.
Calculer $A = R_1R_2$ et $B = P_1Q_1$ avec **K**.
Calculer $C = R_1 + P_1, D = R_2 + Q_1$ et CD avec **K**.
Retourner : $BX^{2p} + (CD - A - B)X^p + A$.

Soit $\mathcal{C}(n)$ la complexité de l'algorithme **K** comptée en nombre d'additions et de multiplications dans $\mathbb{R}$.

3. Établir l'inégalité : $\mathcal{C}(n) \leqslant 3\,\mathcal{C}\left(n - \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + 4n$.

4. On pose : $K(1) = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 2$, $K(n) = 3\,K\left(n - \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + 4n$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathcal{C}(n) \leqslant K(n)$.

   b) Pour tout entier naturel n, on pose : $k(n) = K(2^n)$. Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} k(n) z^n$ et montrer que pour tout $z \in]-\rho, \rho[$, on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} k(n) z^n = \dfrac{1+6z}{(1-3z)(1-2z)}$.

   c) En déduire l'expression de $k(n)$ en fonction de n et montrer que $\mathcal{C}(n) = \mathcal{O}(n^{\frac{\ln 3}{\ln 2}})$.