5

QUESTIONS COURTES

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et X une variable aléatoire définie également sur cet espace. On suppose que (X_n) converge en loi vers X, la suite $(X_n - X)$ converge-t-elle nécessairement en loi vers la variable certaine nulle ?

2. Nature de la suite de terme général $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln k}{n^2}\right)$.

3. Résoudre l'équation $X^3 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

4. On confond polynôme et fonction polynôme. Soit f défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$f(P) : x \mapsto \int_0^1 P(x+t)\,dt$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

5. Quelles sont les variables aléatoires qui sont indépendantes d'elles-mêmes ?

6. Soit E l'ensemble des endomorphismes f de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que pour tout polynôme P, $\deg f(P) \leqslant \deg P$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.

7. Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. On lance en une seule fois n pièces de monnaie, la probabilité que la $k^{\text{ème}}$ pièce amène « Pile » valant $\frac{1}{2k+1}$. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair de « Pile » ?

9. Montrer que pour $x > -1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $(1+x)^k \geqslant 1 + kx$.
Déterminer un équivalent simple de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$ lorsque n tend vers l'infini.

10. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E tels que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$. Montrer que ces sommes sont directes.